ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THỊ HOA

VỀ SỰ PHÁT TRIỂN CỦA ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU TRONG BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

DƯƠNG THỊ HOA

VỀ SỰ PHÁT TRIỂN CỦA ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU TRONG BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dụng chính của bài luận văn, em xin bày tỏ lời lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH. Lê Dũng Mưu người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu để em có thể hoàn thành luận văn này.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới quý thầy, cô giáo trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và giúp đỡ em hoàn thành khóa học.

Em xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, quý thầy cô giáo khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên, gia đình và bạn bè đã luôn động viên, giúp đỡ và tạo điều kiện cho em về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Để hoàn thành được khóa luận bản thân em đã cố gắng rất nhiều nhưng Luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong muốn nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn. Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2017

Tác giả luận văn

DƯƠNG THỊ HOA

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
B	là hình cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^n$
$\overline{B(0,1)}$	hình cầu đơn vị, đóng tâm ở 0
$\mathbb{R}^m_+$	orthant không âm của $\mathbb{R}^m$
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f tại x
$\delta_C(.)$	hàm chỉ của tập C
$L(x,\mu,\nu)$	hàm Lagrange
$f'(x), f''(x),$	đạo hàm (bậc 1 và bậc 2) của hàm số $f(x)$
∇f	Gradient của hàm f
$\nabla^2 f$	ma trận Hessian f
$\langle .,. \rangle$	tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$
∂f	dưới vi phân của hàm f

Mở đầu

Bài toán quy hoạch lồi là phần quang trọng của lý thuyết tối ưu. Trong lý thuyết tối ưu, thì điều kiện tối ưu là rất quan trọng, nó nghiên cứu tính chất nghiệm, đề suất phương pháp giải. Lý thuyết về bài toán quy hoạch lồi đã được quan tâm nghiên cứu nhiều và từ lâu đã đạt được nhiều kết quả quan trọng dựa trên các kết quả của Giải tích lồi và tối ưu hóa. Về phương diện tính toán đã có khá nhiều phương pháp hữu hiệu cho lớp toán này.

Trong quá trình học và tìm hiểu về điều kiện tối ưu trong bài toán quy hoạch lồi ta thấy sự phát triển của bài toán rất phong phú và nhiều vấn đề được nối tiếp rất khoa học và hay.

Mục đích của luận văn là tổng kết lại giai đoạn phát triển của điều kiện tối ưu trong bài toán quy hoạch lồi và xét đến các ứng dụng của chúng trong việc xây dựng phương pháp giải. Trên cơ sở đó khảo sát đến một số ứng dụng trong việc giải bài toán quy hoạch lồi. Tổng hợp lại lý thuyết tối ưu thì điều kiện tối ưu là rất quan trọng vì chúng cho phép nghiên cứu tính chất nghiệm, xây dựng các phương pháp giải. Điều kiện tối ưu được dựa trên nguyên lý Fermat trong bài toán cực trị không có nghiệm ràng buộc của hàm một biến khả vi đã được học trong chương trình PTTH. Theo đó người ta đã phát triển nguyên lí này bài quy hoạch có ràng buộc của hàm nhiều biến không nhất thiết khả vi.

Bản luận văn, ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo còn có hai chương chính cụ thể là: Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản nhất về Giải tích lồi. Chương 2 giới thiệu bài toán tối ưu và đặc biệt đi sâu vào sự phát triển của các điều kiện tối ưu cho các lớp bài toán tối ưu lồi.

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị về giải tích lồi

Chương này chủ yếu nhắc lại một số khái niệm, định nghĩa và kết quả cần thiết liên quan đến tập lồi và hàm lồi. Nội dung chương này tham khảo từ các tài liệu [1], [2].

1.1 Tập lồi

1.1.1 Các định nghĩa cơ bản về tập lồi

Định nghĩa 1.1.1 Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một *tập lồi*, nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \big[0, 1\big] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

Ta nói x là *tổ hợp lồi* của các điểm (véc - tơ) $x^1, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tương tư, x là *tổ hợp a-phin* của các điểm (véc - tơ) $x^1, ..., x^k$ nếu

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Tập hợp của các tổ hợp a-phin của $x^1, ..., x^k$ thường được gọi là *bao a-phin* của các điểm này.

Định lý 1.1.2 *Tập hợp C là lồi khi và chỉ khi nó chứa mọi tổ hợp lồi của các điểm của nó. Tức là: C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda_1, ..., \lambda_k > 0 : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \forall x^1, ..., x^k \in C \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \in C.$$

Chứng minh.

Điều kiện đủ là hiển nhiên từ định nghĩa. Ta chứng minh điều kiện cần bằng quy nạp theo số điểm. Với $k = 2$, điều cần chứng minh suy ra ngay từ định nghĩa của tập lồi và tổ hợp lồi. Giả sử định lý đúng với $k - 1$ điểm. Ta cần chứng minh với k điểm.

Giả sử x là tổ hợp lồi của k điểm $x^1, ..., x^k \in C$. Tức là

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j, \lambda_j > 0 \ \forall j = 1, ..., k, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1.$$

Đặt

$$\xi = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j.$$

Khi đó $0 < \xi < 1$ và

$$x = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j x^j + \lambda_k x^k = \xi \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j + \lambda_k x^k. \tag{1.1}$$

Do

$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} = 1$$

và $\frac{\lambda_j}{\xi} > 0$ với mọi $j = 1, ..., k - 1$, nên theo giả thiết quy nạp, điểm

$$y := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\xi} x^j \in C.$$

Ta có

$$x = \xi y + \lambda_k x^k.$$

Do $\xi > 0, \lambda_k > 0$ và $\xi + \lambda_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$, nên x là một tổ hợp lồi của hai điểm y và x^k đều thuộc C. Vậy $x \in C$. $\square$

Lớp các tập lồi là đóng với các phép giao, phép cộng đại số và phép nhân tích Descartes. Cụ thể, ta có định lý sau:

Định lý 1.1.3 *Nếu A, B là các tập lồi trong $\mathbb{R}^n$, C là lồi trong $\mathbb{R}^m$, thì các tập sau là lồi:*

$$A \cap B := \{x | x \in A, x \in B\},$$

$$\lambda A + \beta B := \{x | x = \alpha a + \beta b, a \in A, b \in B, \lambda, \beta \in \mathbb{R}\},$$

$$A \times C := \{x \in \mathbb{R}^{n+m} | x = (a, c) : a \in A, c \in C\}.$$

Chứng minh. Dễ dàng được suy ra trực tiếp từ định nghĩa. $\square$

Định nghĩa 1.1.4 Một tập C được gọi là tập a-phin nếu nó chứa đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó, tức là

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in C.$$

Vậy tập a-phin là một trường hợp riêng của tập lồi. Như đã nêu, một ví dụ điển hình của tập a-phin là các không gian con. Một ví dụ khác về tập a-phin là siêu phẳng được định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 1.1.5 Siêu phẳng trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các điểm có dạng

$$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là một véc - tơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Véc - tơ a thường được gọi là véc - tơ pháp tuyến của siêu phẳng. Một siêu phẳng sẽ chia không gian ra hai nửa không gian. Nửa không gian được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1.6 Nửa không gian là một tập hợp có dạng

$$\{x | a^T x \geq \alpha\},$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Đây là nửa không gian đóng. Tập

$$\{x|a^T x \geq \alpha\}$$

là nửa không gian mở.

Như vậy một siêu phẳng chia không gian ra làm hai nửa không gian, mỗi nửa không gian ở về một phía của siêu phẳng. Nếu hai nửa không gian này là đóng thì phần chung của chúng chính là siêu phẳng đó.

Mệnh đề dưới đây cho thấy tập a-phin chính là ảnh tịnh tiến của một không gian con.

Định lý 1.1.7 *$M \neq \varnothing$ là tập a-phin khi và chỉ khi nó có dạng $M = L + a$ với L là một không gian con và $a \in M$. Không gian con L này được xác định duy nhất.*

Không gian L trong định lý trên được gọi là không gian con song song với M, hoặc nói ngắn gọn hơn là không gian con của M. Thứ nguyên (hay chiều) của một tập a-phin M được định nghĩa bởi thứ nguyên của không gian song song với M và được ký hiệu là $\dim M$.

Định nghĩa 1.1.8 Một tập được gọi là tập lồi đa diện, nếu nó là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng.
Như vậy, theo định nghĩa, tập lồi đa diện là tập hợp nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính. Dạng tường minh của một tập lồi đa diện được cho như sau:

$$D := \{x \in \mathbb{R}^n | \langle a^j, x\rangle \leq b_j, j = 1, ..., m\}.$$

Hoặc nếu ta ký hiệu A là ma trận có m hàng là các véc - tơ a^j ($j = 1, ..., m$) và véc - tơ $b^T = (b_1, ..., b_m)$, thì hệ trên viết được là:

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}.$$

Chú ý rằng do một phương trình

$$\langle a, x\rangle = b$$

có thể viết một cách tương đương dưới dạng hai bất phương trình

$$\langle a, x\rangle \leq b, \langle -a, x\rangle \leq b,$$